تصحيح مقترح لمباراة الطب

مادة الرياضيات 2022 / 2021

Q 61 $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{\ln(e+x)}-1}{\sqrt{x+1}-1} =$

$= \lim_{x\to 0} \frac{g(x)-g(0)}{x-0} \times \frac{x-0}{f(x)-f(0)}$

$g'(x) = \sqrt{\ln(e+x)}' = \frac{\frac{1}{e+x}}{2\sqrt{\ln(e+x)}} \Rightarrow g'(0) = \frac{1}{2e}$

$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} \Rightarrow f'(0) = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \lim(\dots) = \frac{2}{2e} = \frac{1}{e}$

الصحيح $\frac{1}{e}$ **B**

Q 62 $f(x) = \frac{1}{1-x}\ln(1+\frac{1}{x})$

$f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}\ln(1+\frac{1}{x}) + \frac{1}{1-x} \times \frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}}$

$= \frac{1}{(1-x)^2}\ln(1+\frac{1}{x}) + \frac{1}{x(x^2-1)}$

الصحيح **B**

Q 63 $\frac{7-15i}{15+7i} = \frac{i(7-15i)}{i(15+7i)}$

$= \frac{i(7-15i)}{15i-7} = \frac{-i(7-15i)}{7-15i} = -i$

ولدينا: $(-i)^{2021} = (-1)^{2021}(i)^{2021}$

$= -i \times i^{2020} = \boxed{-i}$

الصحيح: $-i$ **D**

Q 64 $x \in]0;1[\Rightarrow -x \neq 1$

ومنه: $1-x+\dots+(-1)^n x^n = (-x)^0+\dots+(-x)^n$

$= \frac{1-(-x)^{n+1}}{1-(-x)} = \frac{1-(-x)^{n+1}}{1+x}$

$-1<-x<0 \Rightarrow \lim(-x)^{n+1} = 0$

اذن: $\lim \frac{1-(-x)^{n+1}}{1+x} = \frac{1}{1+x}$

الصحيح: $\frac{1}{1+x}$ **E**

Q 65 $x^5+x-1=0$

الدالة: $f: x \mapsto x^5+x-1$

متصلة وتزايدية قطعا على $\mathbb{R}$:

$f'(x) = 5x^4+1 > 0$

اذن اذا كان لها حل فهو وحيد.

لدينا: $0 \in f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$

اذن المعادلة تقبل حلا وحيدا (T.V.I)

الصحيح 1 **B**

Q 66 $|z|\bar{z} = 15-20i$

نعلم أن: $|\bar{z}| = |z|$ و $||z|| = |z|$

اذن: $||z|\bar{z}| = |15-20i|$

$\Rightarrow |z|\times|z| = \sqrt{15^2+20^2} =$

$\Rightarrow |z|^2 = \sqrt{625} = \sqrt{25^2} = 25$

$\Rightarrow |z| = \sqrt{25} = 5$

ومنه: $|(1+i)z| = |1+i| \times |z|$

$= \sqrt{1+1} \times 5 = 5\sqrt{2}$

الصحيح $5\sqrt{2}$ **E**

Q 67 النهاية على اليمين في 0 تخالف النهاية في 0 على اليسار:

لدينا: $x<0 \Rightarrow x = -|x| = -\sqrt{x^2}$

ومنه: $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} -\sqrt{\frac{\ln(1+x^2)}{x^2}}$

$= -\sqrt{1} = \boxed{-1}$

و $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \sqrt{1} = \boxed{1}$

اذن ليس لها نهاية في 0.

الصحيح: **E**

Q68 الدالة $f(x) = x^2 + x$

متصلة و لدينا : $u_{n+1} = f(u_n)$

اذا كانت $\ell = \lim u_n$ موجودة فإن :

$\ell = f(\ell) \Rightarrow \ell = \ell^2 + \ell \Rightarrow \ell^2 = 0$

$\Rightarrow \ell = 0$

الصحيح هو : **C**

Q69 $\frac{x}{1+e^{-x^2}} = \frac{xe^{x^2}}{e^{x^2}+1}$

ولدينا : $(e^{x^2}+1)' = 2xe^{x^2}$

اذن :

$\int_0^1 \frac{x}{1+e^{-x}} dx = \frac{1}{2}[\ln(e^{x^2}+1)]_0^1$

$= \frac{1}{2}[\ln(e+1) - \ln(2)] = \ln\sqrt{\frac{e+1}{2}}$

الصحيح هو : **D**

Q70 f دالة أصلية لـ f' اذن :

$\int_1^e f'(x)\,dx = [f(x)]_1^e = f(e) - f(1)$

$\Rightarrow \int_1^e (2x + \ln x)\,dx = f(e) - 4$

$\Rightarrow [x^2]_1^e + \int_1^e \ln(x)\,dx = f(e) - 4$

$\Rightarrow e^2 - 1 + 1 = f(e) - 4 \Rightarrow \boxed{f(e) = e^2 + 4}$

استعملنا مكاملة بأجزاء :

$\int_1^e \ln(x)dx = [x\ln x]_1^e - \int_1^e dx$

الصحيح : $e^2 + 4$ **C**

Q71 $z = 1 + i(1+\sqrt{2})$

$\Rightarrow z^2 = 2\sqrt{2}(1+\sqrt{2})\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$\Rightarrow z^2 = \left[2(\sqrt{2}+2) ; \frac{3\pi}{4}\right]$

اذن : $|z| = \sqrt{2}\sqrt{\sqrt{2}+2}$ و $Arg(z) = \frac{3\pi}{8}\ [2\pi]$

نعلم أن : $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$

ومنه : $\cos(x) = \sqrt{\frac{1}{2}(\cos(2x)+1)}$

$\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{\frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+1\right)} = \frac{\sqrt{\sqrt{2}+2}}{2}$

$\Rightarrow 2\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{2}\sqrt{\sqrt{2}+2} = |z|$

الصحيح هو : **A**

2

Q72 نلاحظ بأن $f'(x)f''(x)$ هي مشتقة : $\frac{1}{2}(f'(x))^2$

اذن : $(f'(x)^2)' = 2f'(x)f''(x)$

$\Rightarrow \int_1^2 (f'(x)^2)'\,dx = 2\underbrace{\int_1^2 f'(x)f''(x)\,dx}_{=8}$

$\Rightarrow [(f'(x))^2]_1^2 = 2 \times 8$

$\Rightarrow f'(2)^2 - f'(1)^2 = 16$

$\Rightarrow \underbrace{(f'(2) - f'(1))}_{=2}(f'(2) + f'(1)) = 16$

اذن : $f'(2) + f'(1) = \frac{16}{2} = \boxed{8}$

الصحيح : 8 **C**

Q73 ملاحظة : لا يمكن تطبيق القاعدة $\sum_1^n q^k = q\frac{1-q^n}{1-q}$

حتى نتأكد من أن : $q \neq 1$

ولهذا نميز بين حالتين :

$q = 1 \Rightarrow S_n = \sum_{k=1}^n q^k = \sum_{k=1}^n 1$

$= \underbrace{1 + \dots + 1}_{n} = n$

$\Rightarrow \lim S_n = +\infty$

هذه الحالة مرفوضة لأن : $\lim S_n = 4$!

وبالتالي : $q \neq 1$ اذا :

$\begin{cases} S_n = \sum_{k=1}^n q^k \\ \lim S_n = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} S_n = q\frac{1-q^n}{1-q} \\ \lim S_n = 4 \end{cases}$

وهذا يستلزم أن : $\lim q^n = 0$ اذن :

$4 = q\frac{1-0}{1-q} \Rightarrow 4 = \frac{q}{1-q} \Rightarrow q = \frac{4}{5}$

الصحيح : $\frac{4}{5}$ **C**

Q 74 $I = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\sin(x)}{\sin(x)+\cos(x)}\,dx$

نضع: $J = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\cos(x)}{\sin(x)+\cos(x)}\,dx$

نلاحظ أن:

$$I+J = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin(x)+\cos(x)}{\sin(x)+\cos(x)}\,dx = \int_{\pi/6}^{\pi/3} dx$$

$$= \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \boxed{\frac{\pi}{6}}$$

وأن:

$$I-J = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\sin(x)-\cos(x)}{\sin(x)+\cos(x)}\,dx$$

$$= \left[-\ln(\sin(x)+\cos(x))\right]_{\pi/6}^{\pi/3}$$

$$= \ln\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right) - \ln\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} I+J = \frac{\pi}{6} \\ I-J = 0 \end{cases} \Rightarrow 2I = \frac{\pi}{6} + 0 \Rightarrow \boxed{I = \frac{\pi}{12}}$$

الصحيح **E** $\frac{\pi}{12}$

Q75 $|z_1 - z_2|^2 = (z_1 - z_2)(\bar{z}_1 - \bar{z}_2)$

$$= z_1\bar{z}_1 - (z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2) + z_2\bar{z}_2$$

$$= |z_1|^2 - 2\,Re(z_1\bar{z}_2) + |z_2|^2$$

$$= 2 - 2\,Re(z_1\bar{z}_2)$$

اذن يكفي حساب: $Re(z_1.\bar{z}_2)$

لدينا بنفس الطريقة:

$$\sqrt{3}^2 = |z_1+z_2|^2 = 2 + 2\,Re(z_1\bar{z}_2)$$

$$\Rightarrow Re(z_1 z_2) = \frac{1}{2}(3-2) = \frac{1}{2}$$

ومنه: $|z_1 - z_2|^2 = 2 - 2\times\frac{1}{2} = 1$

وبالتالي $|z_1 - z_2| = 1$

الصحيح هو: **A** 1

Q 76 نضع لكل n من IN: $v_n = u_n^2$

نلاحظ أن: $u_n^2 = \frac{u_{n-1}^2 + u_{n+1}^2}{2}$

$$\Rightarrow v_n = \frac{v_{n-1} + v_{n+1}}{2}$$

ومنه (v_n) متتالية حسابية أساسها:

$$r = v_1 - v_0 = u_1^2 - u_0^2 = 1$$

اذا: $v_n = v_0 + nr = n\times 1 = n$

نجد: $u_n = \sqrt{v_n} = \sqrt{n}$

اذا: $\lim u_n = +\infty$

الصحيح: **B** $+\infty$

Q 77 الدالة: $x \mapsto ax+b$ متصلة و ق.ش على $]-\infty;0[$

الدالة: $x \mapsto \frac{1}{x+1}$ متصلة و ق.ش على $]0;+\infty[$

اذن: f ق.ش في 0 اذا وفقط اذا:

f متصلة في 0 و: $f_g'(0) = f_d'(0)$

$$\Leftrightarrow \left(a = \frac{-1}{(0+1)^2} \text{ و } b = \frac{1}{1+0}\right)$$

$$\Leftrightarrow (a = -1 , b = 1)$$

الصحيح: **B** $a=-1 , b=1$

Q 78 المعادلة: $f(x) = 0$

$$\Leftrightarrow 3x^2 + 2ax + b = 0$$

$$\Delta = 4a^2 - 4\times 3b = 4(a^2 - 3b)$$

ولدينا:

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx < 2 \Leftrightarrow [x^3+ax^2+bx]_{-1}^{1} < 2$$

$$\Leftrightarrow (1+a+b)-(-1+a-b) < 2$$

$$\Leftrightarrow 1+a+b+1-a+b < 2 \Leftrightarrow b < 0$$

اذا: $-3b > 0$ ومنه: $\Delta > 0$

اذن حلان:

الصحيح **C** 2

Q 79 $z^2 - \sin(2\alpha)z + \sin^2(\alpha) = 0$ $\quad 0<\alpha<\frac{\pi}{2}$

$$\Delta = \sin^2(2\alpha) - 4\sin^2(\alpha)$$

$$= 4\sin^2(\alpha)\cos^2(\alpha) - 4\sin^2(\alpha)$$

$$= -4\sin^4(\alpha) = (i2\sin^2(\alpha))^2$$

هناك عددان مترافقان: z_1 , z_2

$$z_1 = \frac{\sin(2\alpha) - i2\sin^2(\alpha)}{2} = \sin(\alpha)[\cos(\alpha) - i\sin(\alpha)]$$

اذا:

$$z_1 = \sin(\alpha)e^{-i\alpha}$$

و

$$z_2 = \sin(\alpha)e^{i\alpha}$$

وبالتالي نستنتج أن:

(المثلث : $OM(z_1)M(z_2)$ متساوي الأضلاع)

$\Leftrightarrow OM(z_1) = OM(z_2) = M(z_1)M(z_2)$

$\Leftrightarrow |\sin(\alpha)| = |\sin(\alpha)(e^{i\alpha} - e^{-i\alpha})|$

$\Leftrightarrow 1 = |2i\sin(\alpha)| = 2|\sin(\alpha)|$

$\Leftrightarrow |\sin(\alpha)| = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{6}$

الصحيح هو: $\pi/6$ **D**

Q 80 $(\forall n \in \mathbb{N})\ f_n(x) = e^{-x} - nx$

f_n ق.ش على $\mathbb{R}$ و:

$\forall x \in \mathbb{R}: f_n'(x) = -e^{-x} - n < 0$

f تناقصية قطعا وبالتالي:

حل المعادلة: $f_n(x) = 0$ إن وُجِد فهو وحيدا

لدينا،

$f_n(0) = 1 - 0 = 1 > 0$

$f_n(1) = \frac{1}{e} - n$

$f_n(-1) = e + n > 0$

نلاحظ أن: $n \geq 1 \Rightarrow f_n(1) < 0$

لأن: $\frac{1}{e} - n \leq \frac{1}{e} - 1 \leq \frac{1-e}{e} < 0$

وبالتالي:

$(\forall n \in \mathbb{N}^*)(\exists!\ a_n \in]0;1[)$

$f_n(a_n) = 0$

وبالتالي الأجوبة التي يمكن اختيارها هي: **A** أو **B** أو **C**

لدينا:

$f_n(a_n) = 0 \Rightarrow na_n = e^{-a_n} > 0$

$\Rightarrow \ln(na_n) = -a_n$

الدالة $\ln$ متصلة.

إذا كان: $\lim na_n = 1$ فإن:

$\ln(1) = -\lim a_n$

$\Rightarrow \lim a_n = 0$

وهذا ممكن لأن: $0 < a_n < 1$

إذا كان: $\lim na_n = \text{"}0^+\text{"}$

فإن $\lim \ln(na) = -\lim a_n$

$\Rightarrow -\infty = -\lim a_n$

وهذا مرفوض لأن (a_n) محدودة!

إذا كان: $\lim na_n = e$

فإن: $\ln(e) = -\lim a_n$

$\Rightarrow \lim a_n = -1$

وهذا مرفوض لأن: $0 < a_n < 1$

(إذن نهايتها l تحقق: $0 < l < 1$)

وبالتالي الجوابان **B** و **C** خاطئات:

الصحيح هو: **A**

والحمد لله رب العالمين

ملاحظة هامة:

امتحان مادة الرياضيات صعب جدا على تلاميذ مستوى: علوم تجريبية.